Lineare Gleichungssysteme (drei Unbekannte) • Lösbarkeit
Übung

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender linearer Gleichungssysteme.

$$\text{a)}\quad \begin{array}{rrrrcr} \text{I)} & 3x_1 & +x_2 & & = & 0 \\ \text{II)} & 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ \text{III)} & 3x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 2 \end{array}$$

$$\text{b)}\quad \begin{array}{rrrrcr} \text{I)} & 4x_1 & -4x_2 & +x_3 & = & 7 \\ \text{II)} & x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & -3 \\ \text{III)} & 2x_1 & -10x_2 & -3x_3 & = & 11 \end{array}$$

$$\text{c)}\quad \begin{array}{rrrrcr} \text{I)} & -2x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 0 \\ \text{II)} & x_1 & & +x_3 & = & 3 \\ \text{III)} & 4x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = & 6 \end{array}$$

2. Ein lineares Gleichungssystem besitzt die beiden Lösungen $(0; 1; 1)$ und $(2; 5; 3)$. Geben Sie zwei weitere Lösungen an.

3. Erstellen Sie jeweils ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten und drei Gleichungen, das…

   a) …genau die Lösungsmenge $L = \{(5; -3; 1)\}$ besitzt.

   b) …unlösbar ist.

   c) …unendlich viele Lösungen besitzt. Geben Sie für diesen Fall die Lösungsmenge Ihres Systems an.

4. Bei der Umrechnung des RGB-Farbmodells im Computer auf das CMY-Modell für einen Drucker werden vorliegende Farbinformationen entsprechend folgendem Gleichungssystem umgewandelt. Die Grundfarben sind mit R (Rot), B (Blau) und G (Grün) bzw. C (Cyan), M (Magenta) und Y (Gelb) bezeichnet.

$$\begin{array}{rrrrcc} \text{I)} & 0{,}2R & +0{,}3G & +0{,}2B & = & C \\ \text{II)} & 0{,}5R & -0{,}1G & & = & M \\ \text{III)} & 0{,}1R & +0{,}4G & +0{,}3B & = & Y \end{array}$$

a) Berechnen Sie den Farbwert M für $\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie umgekehrt den Wert von R für $\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$.

b) Durch einen Softwarefehler wird anstelle der dritten Zeile der Koeffizientenmatrix nochmals die zweite Zeile verwendet. Sie lautet dann

$$\text{III)}\ 0{,}5R - 0{,}1G = Y.$$

Erläutern Sie die Folgen des Fehlers in Bezug auf die Lösbarkeit des Gleichungssystems.

5. Lösen Sie folgende linearen Gleichungssysteme in Abhängigkeit vom jeweiligen Parameter $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rrrrcr} \text{I)} & x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 2 \\ \text{II)} & & ax_2 & +2x_3 & = & 2 \\ \text{III)} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrcr} \text{I)} & 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & 4 \\ \text{II)} & 4x_1 & +3x_2 & -5x_3 & = & 6 \\ \text{III)} & -2x_1 & -x_2 & +ax_3 & = & -4 \end{array}$$

Lineare Gleichungssysteme (drei Unbekannte) • Lösbarkeit
Lösung

1.

a) $L = \{(1; -3; 4)\}$

b) $L = \emptyset$

c) $L = \left\{(x_1; x_2; x_3) \,\middle|\, x_1 = 3 - x_3 \wedge x_2 = 2 - \frac{1}{3}x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\right\}$

2. Da das System bereits zwei Lösungen hat, muss es bereits unendlich viele Lösungen besitzen. Mit Sicherheit liegen die Punkte dazu liegen auf der durch $(0; 1; 1)$ und $(2; 5; 3)$ festgelegten Geraden. Die kann beispielsweise durch die Parameterform

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Für $r = 0$ und $r = 1$ erhalten wir die beiden vorgegebenen Lösungen, beispielsweise für $r = 0{,}5$ und $r = 2$ zwei weitere mögliche Zahlentripel $(1; 3; 2)$ und $(4; 9; 5)$.

3.

Einfachste Möglichkeit wäre z.B.
$$\begin{array}{rcccrr} \text{I)} & x_1 & & & = & 5 \\ \text{II)} & & x_2 & & = & -3 \\ \text{III)} & & & x_3 & = & 1 \end{array}$$

a) Wichtig ist hier ein Widerspruch, z.B. in der dritten Zeile:
$$\begin{array}{rcccrr} \text{I)} & x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ \text{II)} & & x_2 & +x_3 & = & 0 \\ \text{III)} & & & 0 & = & 1 \end{array}$$

b) Beachten Sie die Nullzeile in
$$\begin{array}{rcccrr} \text{I)} & x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ \text{II)} & & x_2 & +x_3 & = & 0; \\ \text{III)} & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

hier ist $L = \{(1; x_2; x_3) | x_2 = -x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$.

4.

a) $M = 0{,}5 \cdot 50 - 0{,}1 \cdot 50 = 20$

Für $\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$ ergibt sich $R = 10$.

b) Subtraktion III)– II) liefert die Gleichung $Y - M = 0$.
Für den Wert $M = Y$ existieren daher unendlich viele Lösungen,
für $M \neq Y$ keine Lösung.

5.

a) 1. Fall: $a = -2$
Widerspruch, demnach
$L = \emptyset$

2. Fall: $a \neq -2$
Eindeutige, von a abhängige Lösung
$L = \left\{\left(\frac{a-2}{a+2}; \frac{4}{a+2}; \frac{-a+2}{a+2}\right)\right\}$

b) 1. Fall: $a = 3$
Unendlich viele Lösungen
$L = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = 3 + 2x_3 \wedge x_2 = -2 - x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$

2. Fall: $a \neq 3$
Eine Lösung
$L = \{3; -2; 0\}$